PROBABILITÉS

Probabilité sur un univers

Exercice 1. On lance un dé à six faces truqué : on suppose que la probabilité d'obtenir $k \in [\![1,6]\!]$ est proportionnelle à k. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre pair.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Omega = [\![-n,n]\!]$. On considère l'application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par $\mathbb{P}(\{k\}) = \dfrac{n+1-|k|}{(n+1)^2}$.

1) Montrer que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω.
2) Déterminer la probabilité de l'événement $A = [\![-n+1, n-1]\!]$.

Dénombrements et probabilités

Exercice 3. Un facteur entre dans un immeuble et doit distribuer n lettres, une exactement pour chacune des n boites aux lettres. Mais il est pressé et distribue les lettres au hasard : une dans chaque boite.

1) Quelle est la probabilité que la distribution soit correcte ?
2) Quelle est la probabilité que la boite 1 soit correctement remplie ?
3) Quelle est la probabilité que la boite 1 ne contienne pas de lettre pour d'autres voisins ?
4) Reprendre les questions précédentes, en supposant cette fois qu'une même boite est susceptible de recevoir plusieurs lettres, tandis que d'autres peuvent n'en recevoir aucune.

Exercice 4. Dans une loterie, il y a n tickets dont g tickets gagnants. Quelle est la probabilité de gagner en achetant a tickets ?

Exercice 5. On tire simultanément deux boules dans une urne qui contient b boules blanches et n boules noires. Quelle est la probabilité que les deux boules tirées aient la même couleur ?

Lois de variables aléatoires

Exercice 6. Un joueur lance n fois une pièce équilibrée. Soit X la v.a. qui donne le numéro du lancer lors duquel le résultat est pile pour la première fois. Si pile n'a pas été obtenu au cours des n lancers, alors X prend la valeur 0. Déterminer la loi de X.

Exercice 7. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule de l'urne, on la remet puis on en tire une seconde. On note X la v.a. égale au maximum des deux numéros obtenus. Déterminer $\mathbb{P}(X \leq k)$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. En déduire la loi de X.

Exercice 8. Un examen est passé par n candidats. Chaque candidat réussit l'examen avec une probabilité p. En cas d'échec, le candidat passe un examen de rattrapage, qu'il réussit avec la même probabilité p. Déterminer la loi du nombre de candidats ayant réussi à l'issu des deux épreuves.

Conditionnement

Exercice 9. Un fumeur décide d'arrêter de fumer. Le premier jour (jour 1), il ne fume pas. On suppose ensuite que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$:

- La probabilité qu'il fume le jour $j+1$ sachant qu'il n'a pas fumé le jour j est égale à $\alpha \in]0,1[$.
- La probabilité qu'il ne fume pas le jour $j+1$ sachant qu'il a fumé le jour j est égale à $\beta \in]0,1[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement « le fumeur n'a pas fumé le jour n », et on note p_n sa probabilité.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
2) En déduire une expression de p_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3) Étudier la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 10. Un candidat répond à un QCM où chaque question comporte n réponses possibles. Soit l'étudiant connait la réponse et la coche, soit il choisit au hasard une réponse parmi les n proposées. La probabilité que l'étudiant connaisse la réponse est $p \in]0,1[$.

Si l'étudiant a bien répondu à la question, quelle est la probabilité qu'il y ait répondu en connaissant la réponse ?

Exercice 11. Un groupe de colle de 3 élèves passe une colle de maths. Ils doivent chacun répondre à une question de cours, parmi 6 proposées. Le premier élève tire au hasard une des 6 questions, puis le deuxième tire une des 5 restantes et le dernier une des 4 restantes. Vous êtes l'un des élèves et vous avez fait l'impasse sur une des questions. On vous propose de choisir votre place. Choisissez-vous la première ? la deuxième ? ou la dernière ?

Exercice 12. On dispose de deux dés. L'un est parfaitement équilibré, mais le second est pipé et donne 6 une fois sur trois (les autres faces étant équiprobables). On prend un dé au hasard et on le lance.

1) On obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé tiré soit équilibré ?
2) On obtient un 5. Même question.

Exercice 13. Une famille a deux enfants.

1) L'enfant ainé est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?
2) L'un des enfants est un garçon. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons ?
3) ($\star$) L'un des enfants est un garçon né un lundi. Calculer la probabilité que le deuxième enfant soit un garçon et montrer qu'elle est comprise entre 48% et 49%.

Indépendance

Exercice 14. On lance un dé à six faces équilibré. On pose les événements

$$A = \text{"on obtient 2, 4 ou 6''} \qquad \text{et} \qquad B = \text{"on obtient 3 ou 6''}$$

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 15. Trouver un univers Ω et trois événements A, B, C tels que A, B sont indépendants ; A, C sont indépendants ; mais A et $B \cup C$ ne sont pas indépendants.

Exercice 16. Soit X, Y deux v.a. indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Déterminer la loi de $X+Y$.

Exercice 17. Soit X, Y deux v.a. indépendantes à valeurs dans $[\![1,n]\!]$, avec

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \qquad p_i := \mathbb{P}(X=i) = \mathbb{P}(Y=i)$$

Montrer que

$$\mathbb{P}(X \neq Y) = \sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i)$$

Exercice 18. Soit X et Y deux v.a. indépendantes telles que $X \sim \mathcal{B}(m,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n,p)$. Montrer que $X+Y \sim \mathcal{B}(m+n,p)$.

Couples de v.a.

Exercice 19. On considère deux v.a. indépendantes X et Y qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y).

Exercice 20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et (X,Y) un couple de v.a. à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ dont la loi conjointe est

$$\forall i,j \in [\![0,n]\!] \qquad \mathbb{P}(X=i, Y=j) = \frac{\binom{n}{j}}{2^n(n+1)}$$

Déterminer et reconnaitre les lois marginales de (X,Y).

Exercice 21. On tire une carte d'un jeu de 52 cartes. On note X la v.a. indicatrice de l'événement « on tire une dame » et Y la v.a. indicatrice de l'événement « on tire un roi ».

Déterminer les lois conjointes et marginales du couple (X,Y). Ces variables sont-elles indépendantes ?

Espérance, variance

Exercice 22. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire un jeton, et on note X la v.a. égale au numéro obtenu.

1) Déterminer l'espérance et la variance de X.
2) Quelle est la probabilité de l'événement $\{|X - \mathbb{E}(X)| \leq \sigma(X)\}$.

Exercice 23. On propose de jouer au jeu suivant : le joueur A donne x euros au joueur B, puis le joueur A tire à pile ou face jusqu'à obtenir pile.

- Si A obtient zéro face, le joueur B lui donne deux euros.
- Si A obtient une faces, le joueur B lui donne quatre euros.
- Si A obtient deux faces, le joueur B lui donne huit euros.
- etc.

Pour quelle valeur de x est-ce que le jeu est équitable ?

Exercice 24. On considère une v.a. X de loi

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \qquad \mathbb{P}(X=i) = \alpha i$$

1) Déterminer α pour que la loi de X ait un sens.
2) Déterminer l'espérance de $\dfrac{1}{X}$, de $\dfrac{2^X}{X}$, puis de X.

Exercice 25. On considère un péage autoroutier avec 3 barrières. Un total de n voitures franchissent ce péage en passant (indépendamment les unes des autres) par une des 3 barrières. On note X_1, X_2, X_3 les v.a. qui correspondent au nombre de voitures ayant franchi chacune des 3 barrières, respectivement.

1) Déterminer la loi de X_1.
2) Calculer les variances de X_1, de X_2 et de $X_1 + X_2$.
3) En déduire la covariance de X_1 et X_2.

Exercice 26. On considère U, V deux v.a. indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $X = U + V$ et $Y = U - V$.

1) Calculer la covariance de X et Y.
2) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 27. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ un $(n+1)$-uplet de v.a. indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$. On pose pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ la v.a. $Y_i = X_i X_{i+1}$.

1) Déterminer la loi de Y_i.
2) On suppose $n \geq 3$. Les v.a. Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ? Les v.a. Y_1 et Y_3 sont-elles indépendantes ?
3) Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Déterminer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.

Exercice 28 (CCP). Soit $\varepsilon > 0$ et $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p. Soit $F = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.

1) Démontrer que

$$\mathbb{P}(|F - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

2) On effectue des tirages avec remise d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proporition de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ?